Ondes progressives

Exercice n°1 (★)

Soient deux signaux sinusoïdaux :

$$s_1(t) = S_m \cos(\omega t) \text{ et } s_2(t) = S_m \sin(2\omega t)$$

avec $\omega = 1200\, rad.s^{-1}$ et $S_m = 6\, V$.

On considère la somme $s(t)$ de ces deux signaux.

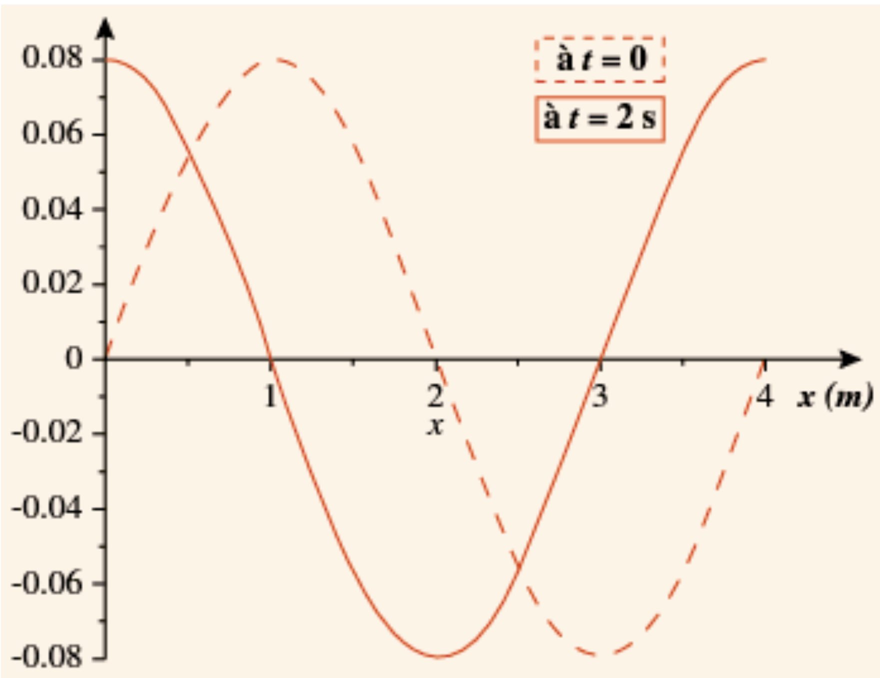
1. $s(t)$ est-il un signal périodique ?
2. Représenter $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sur un même graphe.
3. Représenter $s(t)$ en s'aidant d'une calculatrice graphique.
4. Représenter le spectre de $s(t)$.

On considère maintenant le produit $p(t)$ de ces deux signaux.

5. Calculer $p(t)$.
6. Quelle(s) fréquence(s) une analyse spectrale mettrait-elle en évidence ?
7. Représenter $p(t)$ en s'aidant d'une calculatrice graphique.

Exercice n°2 (★★)

On a représenté une onde progressive unidirectionnelle sinusoïdale à deux instants. Entre les deux dates, elle s'est déplacée d'un mètre vers la gauche.



1. Donner l'expression de $s(x,t)$ et préciser ses caractéristiques.
2. Représenter l'évolution temporelle du déplacement des points d'abscisse $x = 0$, $x = 1\, m$ et $x = 2\, m$.

Exercice n°3 (★)

On considère une onde sonore d'expression :

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx)$$

où ω, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et p_0 sont des constantes.

1. Quels sont le sens et la direction de propagation de l'onde ?
2. Tracer l'allure spatiale de l'onde aux instants $t = 0$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$ où T est la période de l'onde sinusoïdale.
3. Que dire de l'allure spatiale de l'onde à l'instant $t = T$?
4. Un détecteur est placé à $x = \frac{7\pi}{2k}$. Représenter le signal enregistré au cours du temps.

Exercice n°4 (★ ★)

Une onde se propage selon (Ox) positif à la vitesse $c = 3\,m.s^{-1}$. A $t = 0$, elle est décrite par

$$\begin{cases} F(x) = 2\sin(2\pi x) \quad \text{pour} \quad 0 \le x \le 1 \\ F(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x > 1 \end{cases}$$

x étant exprimé en mètres.

1. Représenter $F(x)$.
2. Déterminer le signal $s(x,t)$ en x à la date t.
3. Représenter $s(x,2)$ et $s(3,t)$.

Exercice n°5 (★ ★ ★)

Une onde se propage dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens positif avec la célérité c. La source, située en $x = 0$, émet un train d'ondes, c'est-à-dire une oscillation de durée limitée τ :

$$s(0,t)\begin{cases} 0 \quad \text{si } t < 0 \\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad \text{si } 0 \le t < \tau \\ 0 \quad \text{si } t \ge \tau \end{cases}$$

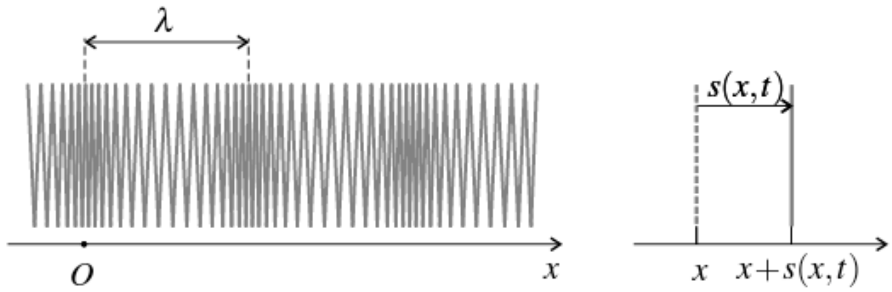
1. Exprimer $s(x,t)$ pour x positif quelconque.
2. Représenter $s\left(x,\frac{\tau}{2}\right)$ et $s\left(x,\frac{3\tau}{2}\right)$ en fonction de x pour $x > 0$ (prendre $\tau = 4T$ pour le dessin). Quelle est la longueur du train d'ondes dans l'espace ?
3. On suppose à présent que

$$s(0,t)\begin{cases} 0 \quad \text{si } t < 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad \text{si } t \ge 0 \end{cases}$$

avec $\tau = T$. En s'aidant d'une calculette graphique, représenter $s(0,t)$ en fonction de t , puis $s(x,6\tau)$ en fonction de x . On considère habituellement que ce train d'ondes dure 6τ . Justifier et donner la longueur du train d'ondes.

Exercice n°6 (★★★)

L'onde de compression-dilatation le long d'un ressort est une onde longitudinale analogue à une onde sonore. Lors du passage de cette onde, chaque spire bouge dans la direction de l'axe (Ox) , axe parallèle au ressort. Un signal associé à l'onde est le déplacement $s(x,t)$ de la spire qui est située à l'abscisse x en l'absence d'onde : cette spire passe ainsi de la position x qu'elle a au repos à la position $x+s(x,t)$.



1. On appelle a l'espacement entre deux spires consécutives dans l'état de repos. Lors du passage de l'onde, la distance entre les spires situées au repos en $x_i = ia$ et $x_{i+1} = (i+1)a$ devient d_i . Exprimer d_i en fonction de a , $s(x_i,t)$ et $s(x_{i+1},t)$.
2. On suppose que $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$. On pose $\Phi = \omega t + \varphi$. En utilisant une formule de trigonométrie, montrer que l'on a :
$$d_i = a + 2A\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\sin\left(\Phi - kx_i - \frac{ka}{2}\right)$$
3. On suppose que $ka \ll 1$. Cette hypothèse correspond-elle bien à la figure ci-dessus ? Montrer que, lors du passage de l'onde, la distance entre deux spires consécutives situées au repos au voisinage de x devient :
$$d(x,t) \simeq a\big(1 + kA\sin(\omega t - kx + \varphi)\big)$$
4. La figure donne l'allure du ressort à $t = 0$. En déduire φ . Où se trouvent, sur la figure, les spires dont le déplacement est nul ?